

## 1 Comparaisons pratiques

### Exercice 1 ★ Équivalents ou pas ? –

Quels sont les équivalents corrects parmi les propositions suivantes ?

- |   |                                      |   |
|---|--------------------------------------|---|
| 1. $n \sim_{+\infty} n + 1$                   | 2. $n^2 \sim_{+\infty} n^2 + n$      | 3. $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(10^6 n)$  |
| 4. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp(n + 10^{-6})$ | 5. $\exp(n) \sim_{+\infty} \exp(2n)$ | 6. $\ln(n) \sim_{+\infty} \ln(n + 1)$ . |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2339]

### Exercice 2 ★ Équivalents simples de suites –

Trouver un équivalent le plus simple possible aux suites suivantes :

- |  |  |
|--|--|
| 1. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$           | 2. $v_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$                 |
| 3. $w_n = \frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{\ln n - 2n^2}$ | 4. $z_n = \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ . |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2598]

### Exercice 3 ★ Équivalent simple –

Déterminer un équivalent le plus simple possible des fonctions suivantes :

- |   |  |
|---|--|
| 1. $x + 1 + \ln x$ en 0 et en $+\infty$ | 2. $\cos(\sin x)$ en 0                       |
| 3. $\cosh(\sqrt{x})$ en $+\infty$       | 4. $\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x}$ en 0 |
| 5. $\ln(\sin x)$ en 0                   | 6. $\ln(\cos x)$ en 0                        |

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[584]

### Exercice 4 ★ Équivalent d'un polynôme –

Soit  $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  un polynôme à coefficients réels, avec  $a_n \neq 0$ . On note  $p$  le plus petit indice tel que  $a_p \neq 0$ . Déterminer un équivalent simple de  $P$  en  $+\infty$ . Déterminer un équivalent simple de  $P$  en 0.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[798]

### Exercice 5 ★★ Comparaison entre exponentielle et factorielle –

Soit  $\gamma > 0$ . Le but de l'exercice est de prouver que

$$e^{\gamma n} = o(n!).$$

Pour cela, on pose, pour  $n \geq 1$ ,  $u_n = e^{\gamma n}$  et  $v_n = n!$ .

1. Démontrer qu'il existe un entier  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

2. En déduire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $n \geq n_0$ , on a

$$u_n \leq C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_n.$$

3. Conclure.

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[800]

---

**Exercice 6** ★★★★★ **Par ordre croissant –**

Classer les suites suivantes par ordre de "négligeabilité" :

$$\begin{array}{llll} a_n = \frac{1}{n} & b_n = \frac{1}{n^2} & c_n = \frac{\ln n}{n} & d_n = \frac{e^n}{n^3} \\ e_n = n & f_n = 1 & g_n = \sqrt{ne^n}. \end{array}$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[2597]

---

**Exercice 7** ★★★★★ **Application des équivalents pour déterminer des limites –**

En utilisant (éventuellement) des équivalents, déterminer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} x(3 + x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{1 - \cos 2x}$
6.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right)$
7.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \tan x}$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[585]

---

**Exercice 8** ★★★★★ **Comparaison de fonctions –**

Comparer les fonctions suivantes :

1.  $x \ln x$  et  $\ln(1 + 2x)$  au voisinage de 0 ;
2.  $x \ln x$  et  $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin x$  au voisinage de  $+\infty$  ;

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[586]

---

**Exercice 9** ★★★★★ **Somme de factorielles –**

Montrer que

$$\sum_{k=1}^n k! \sim_{+\infty} n!.$$

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[587]

## 2 Comparaisons théoriques

---

**Exercice 10** ★★★★★ **Exponentielle et équivalent –**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies au voisinage d'un réel  $a$  ou de  $a = \pm\infty$ . Montrer que  $e^f \sim_a e^g \iff \lim_a (f - g) = 0$ . A-t-on  $f \sim_a g \implies e^f \sim_a e^g$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[589]

---

**Exercice 11** ★★★★★ **Exponentielle et négligeabilité –**

Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $f \xrightarrow{+\infty} +\infty$ .

1. On suppose que  $g =_{+\infty} o(f)$ . Montrer que  $\exp(g) =_{+\infty} o(\exp(f))$ .
2. Montrer que la réciproque est fausse.

3. Application : comparer  $f(x) = (\ln(\ln x))^{x^{\ln x}}$  et  $g(x) = (\ln x)^{x^{\ln(\ln x)}}$  au voisinage de  $+\infty$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[590]

---

**Exercice 12** ★ –

Soient  $f, g$  deux fonctions définies au voisinage d'un point  $a \in \mathbb{R}$  et strictement positives. On suppose en outre que  $f \sim_a g$  et que  $g$  admet une limite  $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ . Montrer que si  $l \neq 1$ , alors  $\ln f \sim_a \ln g$ . Que se passe-t-il si  $l = 1$  ?

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[591]

---

**Exercice 13** ★★★★★ **Equivalence de sommes partielles** –

Soient  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites réelles positives telles que  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ . On pose

$$U_n = \sum_{k=1}^n u_k \text{ et } V_n = \sum_{k=1}^n v_k,$$

et on suppose de plus que  $V_n \rightarrow +\infty$ . Démontrer que  $U_n \sim_{+\infty} V_n$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[592]

---

**Exercice 14** ★★★★★ **Comme c'est bizarre!** –

Soit  $(v_n)$  une suite tendant vers 0. On suppose que  $v_n + v_{2n} = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

1. Démontrer que, pour tout  $n \geq 0$  et tout  $p \geq 0$ , on a

$$|v_n| \leq |v_{2^{p+1}n}| + \sum_{k=0}^p |v_{2^k n} + v_{2^{k+1}n}|.$$

2. En déduire que  $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

[Indication ▼](#) [Correction ▼](#)

[799]

---

**Indication pour l'exercice 1 ▲**

Revenir à la définition en cherchant la limite du quotient.

---

---

**Indication pour l'exercice 2 ▲**

1. Mettre tout au même dénominateur.
  2. Utiliser la quantité conjuguée.
  3. Trouver un équivalent du numérateur et du dénominateur.
  4. Utiliser que  $\sin x/x$  tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers 0.
- 

---

**Indication pour l'exercice 3 ▲**

1. Utiliser les croissances comparées.
  2. Quelle est la limite de cette fonction ?
  - 3.
  4. Commencer par prouver que  $\ln(1+x^2) \sim_0 x^2$ , puis appliquer les théorèmes algébriques sur les équivalents.
  5. Passer par  $\sin x/x$ .
  6. Passer par  $1 - \cos x$
- 

---

**Indication pour l'exercice 4 ▲**

Quel est le terme dominant en  $+\infty$  ?

---

---

**Indication pour l'exercice 5 ▲**

1. Comparer le comportement de  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$  et de  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ .
  2.  $C = u_{n_0}/v_{n_0}$ .
  - 3.
- 

---

**Indication pour l'exercice 6 ▲**

Commencer par séparer les suites qui tendent vers 0, celles qui admettent une limite finie non nulle, et celles qui tendent vers  $+\infty$ .

---

---

**Indication pour l'exercice 7 ▲**

- 1.
  - 2.
  3. Commencer par déterminer un équivalent de  $\ln(1 + \sin x)$ .
  4. Poser  $u = \frac{\pi}{2} - x$ .
  - 5.
  - 6.
  - 7.
  - 8.
  - 9.
- 

---

**Indication pour l'exercice 8 ▲**

- 1.
  2. Majorer  $|\sin x|$  par 1.
- 

---

**Indication pour l'exercice 9 ▲**

Il suffit de montrer que

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!}$$

tend vers 0. Séparer le dernier terme de la somme des autres pour lesquels on peut faire une majoration grossière.

---

**Indication pour l'exercice 10 ▲**

Le quotient de deux exponentielles est l'exponentielle de la différence ! Pour la deuxième partie, trouver un contre-exemple avec  $f \sim g$  mais  $f - g$  ne tend pas vers 0.

---

**Indication pour l'exercice 11 ▲**

1. Remarquer que la condition entraîne  $f - g \rightarrow +\infty$ , puis composition des limites.
  2. L'exponentielle transforme une somme en un produit. On prendra donc  $f = g +$  un petit quelque chose.
  3. Prendre deux fois le logarithme pour trouver deux fonctions facilement comparables, puis appliquer le résultat de la première question.
- 

**Indication pour l'exercice 12 ▲**

Séparer les cas  $l \in ]0, +\infty[$  des cas  $l = 0$  ou  $l = \infty$ . On pourra écrire  $\ln(f) = \ln(f/g) + \ln(g)$ .

---

**Indication pour l'exercice 13 ▲**

Il faut faire un raisonnement avec des  $\varepsilon > 0$ . Commencer par fixer un tel  $\varepsilon > 0$ , puis un indice  $n_0$  pour lequel  $u_n$  et  $v_n$  sont proches à  $\varepsilon > 0$  près. Couper ensuite la somme en deux !

---

**Indication pour l'exercice 14 ▲**

1.  $v_n = v_n + v_{2n} - v_{2n} - v_{4n} + v_{4n} + \dots$
  2. Fixer  $\varepsilon > 0$  et considérer  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $|v_n + v_{2n}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ .
-

### Correction de l'exercice 1 ▲

---

1. Puisque  $n/(n+1)$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini, l'équivalent proposé est correct.
2. Puisque  $(n^2+n)/n^2 = 1 + 1/n$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini, l'équivalent proposé est correct.
3. Puisque  $\ln(10^6 n) = \ln(n) + \ln(10^6)$  et donc que  $\ln(10^6 n)/\ln n = 1 + \ln(10^6)/\ln n$  tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini, l'équivalent proposé est correct.
4. Puisque  $\exp(n + 10^{-6}) = \exp(10^{-6}) \exp(n)$ , on a  $\exp(10^{-6})/\exp(n) = \exp(10^{-6}) \neq 1$ . L'équivalent proposé n'est pas correct.
5. Puisque  $\exp(2n)/\exp(n) = \exp(n)$  tend vers l'infini lorsque  $n$  tend vers l'infini, l'équivalent proposé n'est pas correct.
6. Puisque

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right) = \ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

et que  $\ln(1 + 1/n)$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini, on sait que

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln n} = 1 + \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\ln n}$$

tend vers 1 lorsque  $n$  tend vers l'infini. L'équivalent proposé est correct.

---

### Correction de l'exercice 2 ▲

---

1. On réduit au même dénominateur et on trouve

$$u_n = \frac{2}{(n-1)(n+1)}.$$

Comme  $n-1 \sim_{+\infty} n$  et  $n+1 \sim_{+\infty} n$ , le dénominateur est équivalent à  $n^2$  et  $u_n \sim_{+\infty} \frac{2}{n^2}$ .

2. On a en utilisant la quantité conjuguée :

$$v_n = \frac{(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{n}}.$$

Mais  $\sqrt{1 + \frac{1}{n}}$  et  $\sqrt{1 - \frac{1}{n}}$  tendent vers 1 et donc

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \sim_{+\infty} 2\sqrt{n}.$$

Finalement, on trouve que

$$v_n \sim_{+\infty} \frac{2}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

3. On a

$$\frac{n^3 - \sqrt{1+n^2}}{n^3} = 1 - \sqrt{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^4}}.$$

Comme  $\sqrt{\frac{1}{n^6} + \frac{1}{n^4}}$  tend vers 0, on en déduit que  $n^3 - \sqrt{1+n^2} \sim_{+\infty} n^3$ . On a de plus

$$\frac{\ln n - 2n^2}{-2n^2} = 1 - \frac{\ln n}{2n^2} \rightarrow 1$$

par comparaison du logarithme et des puissances. On en déduit que  $\ln n - 2n^2 \sim_{+\infty} -2n^2$ . Finalement,

$$w_n \sim_{+\infty} \frac{n^3}{-2n^2} = \frac{-n}{2}.$$

4. On sait que  $\sin(x)/x$  tend vers 1 lorsque  $x$  tend vers 0. Donc, par composition, puisque  $1/\sqrt{n+1}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on a  $\frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} \rightarrow 1$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Autrement dit, on a

$$z_n \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \sim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

### Correction de l'exercice 3 ▲

1. C'est assez facile, car on sait bien (on devrait savoir !) qu'en  $+\infty$ , les polynômes écrasent le logarithme, et en 0,  $\ln x$  est la seule fonction de la somme à aller vers l'infini. Ainsi, en 0, on a

$$\frac{x+1+\ln x}{\ln x} = \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x} + 1 \rightarrow 1$$

et donc  $x+1+\ln x \sim_0 \ln x$ . En  $+\infty$ , on a

$$\frac{x+1+\ln x}{x} = 1 + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x} \rightarrow 1$$

et donc  $x+1+\ln x \sim_{+\infty} x$ .

2. Par composition  $\cos(\sin x) \rightarrow 1$  en 0 et donc  $\cos(\sin x) \sim_0 1$ .

3. Par définition du cosinus hyperbolique,

$$\cosh(\sqrt{x}) = \frac{e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}}{2}.$$

Or, en  $+\infty$ ,  $e^{-\sqrt{x}}$  tend vers 0 alors que  $e^{\sqrt{x}}$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit que

$$\frac{\cosh(\sqrt{x})}{e^{\sqrt{x}}/2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

et donc que

$$\cosh(\sqrt{x}) \sim_{+\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2}.$$

4. On sait que  $\sin x \sim_0 x$  et que  $\tan x \sim_0 x$ . D'autre part, on a aussi par composition des limites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = 1$$

et donc on en déduit que

$$\frac{\sin x \ln(1+x^2)}{x \tan x} \sim_0 \frac{x \times x^2}{x \times x} = x.$$

5. On écrit

$$\ln(\sin x) = \ln\left(\frac{\sin x}{x} \times x\right) = \ln(x) + \ln\left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Or,  $\ln(\sin x/x) \rightarrow 0$  en 0, et donc  $\ln(\sin x/x)/\ln(x) \rightarrow 0$ . On en déduit que

$$\ln(\sin x) \sim_0 \ln(x).$$

6. On écrit

$$\ln(\cos x) = \ln(1 - (1 - \cos x)) \sim_0 -(1 - \cos x) \sim_0 -\frac{x^2}{2}.$$

La justification que  $\ln(1 - (1 - \cos x)) \sim_0 -(1 - \cos x)$  est semblable à la justification de la question 4.

### Correction de l'exercice 4 ▲

Le terme dominant en  $+\infty$  est  $a_n x^n$ . On divise donc  $P(x)$  par  $a_n x^n$  et on obtient

$$\frac{P(x)}{a_n x^n} = 1 + \sum_{k=p}^{n-1} \frac{a_k}{a_n} x^{k-n}.$$

Mais pour chaque  $k$  dans  $p, \dots, n-1$ , on a  $k-n < 0$  et donc  $x^{k-n}$  tend vers 0 en  $+\infty$ . Par somme,

$$\frac{P(x)}{a_n x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$$

et donc  $P(x) \sim_{+\infty} a_n x^n$ . La méthode est similaire en 0, mais cette fois le terme dominant est celui de plus petit degré. On divise donc  $P(x)$  par  $a_p x^p$  et on trouve

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} = 1 + \sum_{k=p+1}^n \frac{a_k}{a_p} x^{k-p}.$$

Mais pour  $k \geq p+1$ ,  $x^{k-p}$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers 0. Ainsi,

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

et  $P(x) \sim_0 a_p x^p$ .

### Correction de l'exercice 5 ▲

1. On commence par calculer les deux quotients :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = e^\gamma$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = n+1.$$

Ainsi, la première suite est constante, alors que la deuxième tend vers l'infini. On en déduit l'existence de  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

2. Si on regarde la relation pour  $n = n_0$ , on peut conjecturer que la relation a lieu pour  $C = u_{n_0}/v_{n_0}$ . Montrons ce résultat par récurrence sur  $n \geq n_0$ . Le résultat est vrai si  $n = n_0$ , et s'il est vrai pour un certain  $n \geq n_0$ , alors

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \frac{u_n}{v_n} v_{n+1} \leq \frac{1}{2} C \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} v_{n+1} = C \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1-n_0} v_{n+1}.$$

Le résultat est donc vrai au rang  $n+1$ , et par le principe de récurrence, il est vrai pour tout  $n \geq n_0$ .

3. Clairement, on a pour  $n \geq n_0$ ,

$$0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 2^{n_0} C \frac{1}{2^n}.$$

Par le théorème des gendarmes,  $(u_n/v_n)$  tend vers 0 et donc  $u_n = o(v_n)$ .

### Correction de l'exercice 6 ▲

On remarque d'abord que, en utilisant la croissance comparée des fonctions, que les suites  $(a_n)$ ,  $(b_n)$ ,  $(c_n)$  tendent vers 0. la suite  $(f_n)$  tend vers 1. les suites  $(d_n)$ ,  $(e_n)$  et  $(g_n)$  tendent vers l'infini.

Classons d'abord les trois suites qui tendent vers 0. Clairement, on a  $b_n = o(a_n)$ , puisque  $b_n/a_n = 1/n \rightarrow 0$ . De même, on a  $a_n = o(c_n)$  puisque  $a_n/c_n = 1/\ln n$  qui tend vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . La suite  $(f_n)$  s'intercale ensuite, et on a  $c_n = o(f_n)$ , tandis que la suite  $(f_n)$  est négligeable devant les trois dernières suites. Ensuite, par croissance comparée des puissances et de l'exponentielle,

$$\frac{e_n}{g_n} = \sqrt{\frac{n}{e^n}} \rightarrow 0$$



et donc  $e_n = o(g_n)$ . Enfin, on a

$$\frac{g_n}{d_n} = \frac{n^{7/2}}{\sqrt{e^n}} = \sqrt{\frac{n^7}{e^n}} \rightarrow 0,$$

et donc  $g_n = o(d_n)$ .

---

### Correction de l'exercice 7 ▲

---

1. Il s'agit d'une forme indéterminée 0/0. Au voisinage de 0, on a

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad 1 + 2x \sim 1, \quad x^2 - x^4 \sim x^2$$

d'où

$$\frac{(1 - \cos x)(1 + 2x)}{x^2 - x^4} \sim_0 \frac{x^2}{2x^2}$$

et donc la limite recherchée est 1/2.

2. On a tout simplement

$$x(3+x) \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x} \sin(\sqrt{x})} \sim_0 3x \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = 3\sqrt{3}.$$

La limite recherchée est  $3\sqrt{3}$ .

3. Puisque  $\sin x$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers 0, on a

$$\ln(1 + \sin x) \sim_0 \sin x \sim_0 x.$$

Il vient

$$\frac{\ln(1 + \sin x)}{\tan(6x)} \sim_0 \frac{x}{6x} = \frac{1}{6}$$

est la limite recherchée est donc 1/6.

4. On pose  $u = \frac{\pi}{2} - x$  de sorte que

$$\frac{\ln(\sin^2 x)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2} = \frac{2\ln(\cos u)}{u^2}.$$

(Remarquons que  $\cos u > 0$  pour  $u$  proche de 0). Or, on écrit que

$$\ln(\cos u) = \ln(1 - (1 - \cos u)) \sim_0 -(1 - \cos u) \sim_0 -\frac{u^2}{2}.$$

Il vient

$$\frac{2\ln(\cos u)}{u^2} \sim_0 \frac{-u^2}{u^2} = -1$$

et donc la limite recherchée est égale à  $-1$ .

5. Comme à la question précédente, on a

$$\ln(\cos x) \sim_0 \frac{-x^2}{2}.$$

De plus,

$$1 - \cos(2x) = 2\sin^2(x) \sim_0 2x^2.$$

En effectuant le quotient, on trouve que la limite recherchée est égale à  $-1/4$ .

6. On se ramène en 0 en effectuant le changement de variables  $u = 1/x$ . On trouve

$$\frac{\sqrt{x+1}}{x+2} = \sqrt{u} \times \frac{\sqrt{1+u}}{1+2u} \text{ et } \sqrt{4x+1} = \frac{\sqrt{4+u}}{\sqrt{u}}.$$

De plus,

$$\ln\left(1 - \sqrt{u} \times \frac{\sqrt{1+u}}{1+2u}\right) \sim_0 -\sqrt{u} \times \frac{\sqrt{1+u}}{1+2u} \sim_0 -\sqrt{u}.$$

De plus, on a

$$\frac{\sqrt{4+u}}{\sqrt{u}} \sim_0 \frac{2}{\sqrt{u}}.$$

Il en résulte que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x+1} \ln \left( 1 - \frac{\sqrt{x+1}}{x+2} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2}{\sqrt{u}} \times (-\sqrt{u}) = -2.$$

7. On écrit

$$\begin{aligned} f(x) &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{x^2}\right) \left(1 - \exp\left(-\frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2}\right)\right) \\ &\sim_{+\infty} 1 - \exp\left(-\frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2}\right) \text{ car } \exp(1/x^2) \rightarrow_{+\infty} 1 \\ &\sim_{+\infty} \frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2} \text{ car } \frac{2x+1}{(x+1)^2 x^2} \rightarrow_{+\infty} 0 \\ &\sim_{+\infty} \frac{2}{x^3}. \end{aligned}$$

La limite recherchée est donc 0.

8. On passe à l'exponentielle :

$$\left(\frac{x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}} = \exp\left(\frac{\sin x}{x-\sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right).$$

Or,

$$\ln\left(\frac{x}{\sin x}\right) = \ln\left(1 + \frac{x}{\sin x} - 1\right) \sim_0 \frac{x}{\sin x} - 1 = \frac{x - \sin x}{\sin x}.$$

On en déduit que

$$\frac{\sin x}{x - \sin x} \ln\left(\frac{x}{\sin x}\right)$$

tend vers 1, et donc que la limite recherchée, par composition, est  $e$ .

9. La seule difficulté est de savoir qu'en 0,  $\arctan x \sim x$  et  $\tan x \sim x$ . On trouve alors facilement

$$\frac{(1 - \cos x) \arctan x}{x \tan x} \sim_0 \frac{x^2 x}{2x^2} = \frac{x}{2}.$$

La limite recherchée est 0.

### Correction de l'exercice 8 ▲

1. On a

$$\frac{\ln(1+2x)}{x \ln x} \sim_0 \frac{2}{\ln x} \rightarrow 0.$$

On en déduit que  $\ln(1+2x) = o(x \ln x)$  en 0.

2. On a, pour  $x$  assez grand,

$$\sqrt{x^2 + 3x} \leq 2x, \ln(x^2) = 2 \ln x \text{ et } |\sin x| \leq 1.$$

On en déduit que

$$|\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin x| \leq 4x \ln x$$

et donc que  $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin x = O(x \ln x)$  au voisinage de  $+\infty$ . La relation contraire n'est pas vérifiée, car  $\sin(x)$  peut être nul pour des  $x$  très grands. De plus, on n'a pas  $\sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin x = o(x \ln x)$  en  $+\infty$ . En effet, posons  $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x} \ln(x^2) \sin x$  et  $g(x) = x \ln x$ . Alors  $\frac{f(2k\pi + \pi/2)}{g(2k\pi + \pi/2)}$  admet une limite finie non-nulle (ce que l'on peut vérifier avec des équivalents !).

---

**Correction de l'exercice 9 ▲**

---

On a

$$\frac{\sum_{k=1}^n k!}{n!} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!}.$$

Il suffit de montrer que la dernière somme apparaissant à droite tend vers 0 avec  $n$ . Mais on a

$$\begin{aligned} 0 \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k!}{n!} &\leq \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} \\ &\leq \frac{1}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

Par le théorème des gendarmes, c'est bien le cas !

---

**Correction de l'exercice 10 ▲**

---

Il suffit d'écrire

$$e^f \sim e^g \iff \frac{e^f}{e^g} \rightarrow 1 \iff e^{f-g} \rightarrow 1 \iff f - g \rightarrow 0.$$

Pour  $f(x) = x$  et  $g(x) = x + 1$ , on a  $f \sim_{+\infty} g$  et pourtant  $e^x$  n'est pas équivalent à  $e \times e^x$ .

---

**Correction de l'exercice 11 ▲**

---

1. On a  $\frac{\exp(g)}{\exp(f)} = \exp(g-f)$ . Or,  $g-f \sim_{+\infty} -f$  car  $g = o(f)$ , donc  $g-f$  tend vers  $-\infty$  en  $+\infty$ . Par composition des limites, on a  $\exp(g-f)$  qui tend vers 0 en  $+\infty$ , et donc  $\exp(g) = o(\exp(f))$ .

2. Posons  $f(x) = x^2 + x$  et  $g(x) = x^2$ . On a  $f \sim_{+\infty} g$  alors que  $\exp(f(x)) = \exp(x^2) \exp(x)$  et  $\exp(g(x)) = \exp(x^2)$ . Ainsi,

$$\frac{\exp(g(x))}{\exp(f(x))} = \exp(-x) \rightarrow 0$$

et donc  $\exp(g) = o(\exp(f))$ .

3. On prend deux fois le logarithme, et on trouve, au voisinage de  $+\infty$  :

$$\ln(\ln(f(x))) = \ln x \ln x + \ln(\ln(\ln(x))) \text{ et } \ln(\ln(g(x))) = \ln(\ln x) \ln x + \ln(\ln(\ln x)).$$

On a donc  $\ln(\ln g(x)) = o(\ln(\ln f(x)))$ . On applique alors deux fois le résultat de la première question, en remarquant que  $\ln(\ln f(x))$  et (donc)  $\ln(f(x))$  tendent tous deux vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

---

**Correction de l'exercice 12 ▲**

---

D'abord, si  $l \in ]0, +\infty[$ , on a  $f \rightarrow l$  et par composition,  $\ln f \rightarrow \ln l$ ,  $\ln g \rightarrow \ln l$  avec  $\ln l \neq 0$  puisque  $l \neq 1$ . On en déduit  $\ln f \sim_a \ln g \sim_a \ln l$ . Supposons maintenant que  $l = +\infty$ . Alors on peut écrire

$$\frac{\ln f}{\ln g} = \frac{\ln\left(\frac{f}{g} \times g\right)}{\ln g} = 1 + \frac{\ln(f/g)}{\ln g}.$$

Or,  $\ln(f/g) \rightarrow 0$  et  $\ln(g) \rightarrow +\infty$ , donc  $\ln(f/g)/\ln g \rightarrow 0$  et on a bien  $\ln f \sim_a \ln g$ . Le cas  $l = 0$  est complètement similaire. Finalement, si  $l = 1$ , alors le résultat n'est plus vrai. Par exemple, si on choisit  $f(x) = 1 + x$  et  $g(x) = 1 + x^2$ , avec  $a = 0$ , alors  $f \sim_a g \sim_0 1$  et pourtant

$$\ln(f) \sim_0 x \text{ tandis que } \ln(g) \sim_0 x^2,$$

on conclut car  $x$  et  $x^2$  ne sont pas équivalents en 0.

---

---

**Correction de l'exercice 13 ▲**

---

On va faire un raisonnement précis avec des quantificateurs. Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $u_n \sim_{+\infty} v_n$ , et puisque  $(v_n)$  est une suite positive, il existe un entier  $n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_0$ ,

$$(1 - \varepsilon)v_n \leq u_n \leq (1 + \varepsilon)v_n.$$

Soit  $n \geq n_0$ . On coupe la somme définissant  $U_n$  en deux :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^n u_k$$

de sorte que

$$(1 - \varepsilon) \sum_{k=n_0}^n v_k + \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k \leq U_n \leq (1 + \varepsilon) \sum_{k=n_0}^n v_k + \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k.$$

On va ensuite se ramener à  $V_n$  en écrivant que

$$\sum_{k=n_0}^n v_k = V_n - \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k,$$

de sorte que

$$(1 - \varepsilon)V_n + \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k - (1 - \varepsilon) \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k \leq U_n \leq (1 + \varepsilon)V_n + \sum_{k=1}^{n_0-1} u_k - (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^{n_0-1} v_k.$$

On divise ensuite par  $V_n$  et on utilise que  $(V_n)$  tend vers  $+\infty$ . On en déduit l'existence de  $n_1 \geq n_0$  tel que, pour tout  $n \geq n_1$ ,

$$(1 - \varepsilon) - \varepsilon \leq \frac{U_n}{V_n} \leq (1 + \varepsilon) + \varepsilon.$$

Ceci prouve bien que  $(U_n/V_n)$  tend vers 1, donc que  $U_n \sim_{+\infty} V_n$ .

---

---

**Correction de l'exercice 14 ▲**

---

1. L'idée est d'écrire

$$v_n = v_n + v_{2n} - (v_{2n} + v_{4n}) + (v_{4n} + v_{8n}) - \dots$$

Plus formellement, pour  $p \geq 0$ , on a

$$v_n = v_n + v_{2n} + \dots + (-1)^k (v_{2^k n} + v_{2^{k+1} n}) + \dots + (-1)^p (v_{2^p n} + v_{2^{p+1} n}) + (-1)^{p+1} v_{2^{p+1} n}.$$

On utilise ensuite l'inégalité triangulaire :

$$|v_n| \leq \sum_{k=0}^p |(-1)^k (v_{2^k n} + v_{2^{k+1} n})| + |(-1)^{p+1} v_{2^{p+1} n}|$$

ce qui donne immédiatement le résultat souhaité.

2. Utilisons l'hypothèse. On fixe  $\varepsilon > 0$  et on considère  $n_0$  tel que, pour  $n \geq n_0$ ,  $|v_n + v_{2n}| \leq \frac{\varepsilon}{n}$ . Alors, si  $n \geq n_0$  et  $k \geq 0$ ,  $2^k n \geq n_0$  et donc, d'après l'inégalité précédente,

$$|v_n| \leq \sum_{k=0}^p \frac{\varepsilon}{2^k n} + |v_{2^{p+1} n}|.$$

Mais, d'après la somme d'une série géométrique,

$$\sum_{k=0}^p \frac{1}{2^k} \leq 2,$$

et donc, pour tout  $p \geq 0$  et tout  $n \geq n_0$ ,

$$|v_n| \leq \frac{2\varepsilon}{n} + |v_{2^{p+1}n}|.$$

Maintenant, on sait que la suite tend vers 0.  $n \geq n_0$  étant fixé, on peut trouver  $p$  suffisamment grand pour que

$$|v_{2^{p+1}n}| \leq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Il vient

$$|v_n| \leq \frac{3\varepsilon}{n} \iff n|v_n| \leq 3\varepsilon.$$

Ceci démontre bien que  $v_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

---